Concursul interjudeţean de matematică Victor Vâlcovici

Brăila, 20 Mai 2017

Clasa a 10-a - BAREM

Problema 1. Determinaţi $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ dacă $z_1^2\overline{z_2} = z_2^2\overline{z_3} = z_3^2\overline{z_1}$ şi $z_1 + z_2 + z_3 = 1$.

Enache Pătraşcu, Focşani

Soluţie:

Din $z_3^2\overline{z_1} = z_1^2\overline{z_2}$ deducem că $\overline{z_3}^2 = \frac{\overline{z_1}^2 z_2}{z_1}$.**(1p)**

Vom demonstra că $\frac{z_1^5}{z_2^5} = \frac{\overline{z_1}^2}{\overline{z_2}^2}$. Pentru aceasta se observă succesiv că:

$$\frac{z_1^2}{z_2^2} = \frac{\overline{z_3}}{\overline{z_2}} \Rightarrow \frac{z_1^4}{z_2^4} = \frac{\overline{z_3}^2}{\overline{z_2}^2} = \frac{\frac{\overline{z_1}^2 z_2}{z_1}}{\overline{z_2}^2} = \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{\overline{z_1}^2}{\overline{z_2}^2} \Rightarrow \frac{z_1^5}{z_2^5} = \frac{\overline{z_1}^2}{\overline{z_2}^2}.\textbf{(2p)}$$

Trecând la module, avem $|\frac{z_1}{z_2}|^5 = |\frac{z_1}{z_2}|^2$, deci $|z_1| = |z_2|$. **(1p)**

Atunci $(\frac{z_1}{z_2})^7 = (\frac{z_1}{z_2})^5(\frac{z_1}{z_2})^2 = (\frac{z_1}{z_2})^2(\frac{\overline{z_1}^2}{\overline{z_2}^2})^2 = 1$, deci $(\frac{z_2}{z_1})^7 = 1$, adică $z_2 = az_1$, unde a este o rădăcină de ordin 7 a unităţii.**(1p)**

Atunci $z_3 = \frac{\overline{z_1}^2 z_2}{\overline{z_2}^2} = \frac{\overline{z_1}^2 a z_1}{\overline{a}^2\overline{z_1}^2} = \frac{az_1}{\overline{a}^2} = a^3 z_1$.**(1p)**

Din $z_1 + z_2 + z_3 = 1$ deducem că $z_1 = \frac{1}{1+a+a^3}, z_2 = \frac{a}{1+a+a^3}, z_3 = \frac{a^3}{1+a+a^3}$.**(1p)**

Problema 2. Să se rezolve ecuaţia $log_3(x^2 - 5x + 1) = x$.

Marius Mohonea, Focşani

Soluţie:

Pentru ca logaritmul să existe, $x \in D = (-\infty, \frac{5-\sqrt{21}}{2}) \cup (\frac{5+\sqrt{21}}{2}, \infty)$.**(1p)**

Fie $f, g : D \to \mathbb{R}, f(x) = log_3(x^2 - 5x + 1), g(x) = x$.

Pe $(-\infty, \frac{5-\sqrt{21}}{2})$ funcţiile au monotonii diferite, deci $f(x) = g(x)$ are cel mult o soluţie. Observăm că aceasta este 0. **(2p)**

Pe $(\frac{5+\sqrt{21}}{2}, \infty)$ funcţiile sunt crescătoare. **(1p)**
Se arată inductiv că $f(n+1) < g(n) \Leftrightarrow log_3(n^2 - 3n - 3) < n$ pentru orice număr natural $n \geq 5$. **(1p)**

Dacă $x \in (\frac{5+\sqrt{21}}{2}, 5)$, atunci $f(x) < f(5) = 0 < 4 = g(4) < g(x)$, deci nu avem soluţii.

Dacă $x \geq 5$, atunci $f(x) < f([x] + 1) < g([x]) \leq g(x)$, deci nu avem soluţii.**(2p)**

Problema 3. Fie $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. Pentru fiecare $k \in \{0,1,2\}$ notăm cu p_k numărul de submulţimi cu trei elemente ale mulţimii $\{1,2,3,...,3n\}$ care au suma elementelor congruentă cu k modulo 3. Fie ε o rădăcină nereală de ordin 3 a unităţii.

(a) Arătaţi că dacă există $a,b,c \in \mathbb{R}$ astfel încât $a+b\varepsilon+c\varepsilon^2=0$, atunci $a=b=c$.
(b) Arătaţi că:

$$p_0+p_1\varepsilon+p_2\varepsilon^2=\sum_{1\leq a<b<c\leq 3n}\varepsilon^{a+b+c}.$$

(c) Determinaţi numerele p_0, p_1 şi p_2.

Cristi Săvescu, Bucureşti

Soluţie:

(a) Dacă unul dintre a,b,c este nul, atunci pentru celelalte două se obţine o relaţie de tipul $a+\varepsilon^p b=0, p=1,2$, deci $a=b=c=0$. Altfel, împărţind prin a şi ţinând cont că $1+\varepsilon+\varepsilon^2=0$, obţinem în mod similar concluzia. **(1p)**

(b) Pentru fiecare $k=0,1,2$ observăm că $p_k\varepsilon^k=\sum\limits_{\substack{1\leq a<b<c\leq 3n\\ a+b+c\equiv k(mod3)}}\varepsilon^{a+b+c}$ **(2p)**.

Atunci,

$$p_0+p_1\varepsilon+p_2\varepsilon^2=\sum_{\substack{1\leq a<b<c\leq 3n\\ a+b+c\equiv 0(mod3)}}\varepsilon^{a+b+c}+\sum_{\substack{1\leq a<b<c\leq 3n\\ a+b+c\equiv 1(mod3)}}\varepsilon^{a+b+c}+\sum_{\substack{1\leq a<b<c\leq 3n\\ a+b+c\equiv 2(mod3)}}\varepsilon^{a+b+c}=$$

$$=\sum_{1\leq a<b<c\leq 3n}\varepsilon^{a+b+c}.\textbf{(1p)}$$

(c) Observăm că $\sum\limits_{1\leq a<b<c\leq 3n}\varepsilon^{a+b+c}$ este coeficientul lui x^{3n-3} din dezvoltarea lui $(x+1)(x+\varepsilon)...(x+\varepsilon^{3n})$.**(1p)**

Pentru orice $x\in\mathbb{R}$ avem $(x+1)(x+\varepsilon)(x+\varepsilon^2)=x^3+1$ (calcul direct). Dar $(x+1)(x+\varepsilon)...(x+\varepsilon^{3n})=(x^3+1)^n$, deci coeficientul căutat este $C_n^{n-1}=n$. **(1p)**

Atunci, din (b) avem $p_0+p_1\varepsilon+p_2\varepsilon^2=n$, deci conform (a) $p_0-n=p_1=p_2$. Cum însă $p_0+p_1+p_2=C_{3n}^3$, avem $p_1=p_2=\frac{C_{3n}^3-n}{3}=\frac{3n^2(n-1)}{2}$ şi $p_0=\frac{C_{3n}^3+2n}{3}=\frac{3n^2(n-1)}{2}+n$. **(1p)**